Minsterul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Constanţa

A 60-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Mangalia – 13 aprilie 2009

CLASA a XII-a – SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

Problema 1. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă astfel încât

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \le 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Să se determine f ştiind că $f(1) = -\frac{1}{6}$.

Soluţie şi barem: Avem

$$0 \le \int_0^1 (f'(x)+x)^2 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2\int_0^1 x f'(x) dx + \frac{1}{3} =$$

$$= \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2x f(x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{3} =$$

$$= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2\int_0^1 f(x) dx \le 0,$$

deci $\int_0^1 (f'(x)+x)^2 dx = 0$. .... **4 puncte**

Din continuitatea funcţiei f', rezultă că $f'(x) = -x$. Aşadar,

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + a, \ \forall x \in [0,1].$$ **2 puncte**

Din condiţia $f(1) = -\frac{1}{6}$, obţinem $a = \frac{1}{3}$, deci $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$. ...**1 punct**

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ finit. Notăm cu d numărul divizorilor lui zero, iar cu n numărul elementelor nilpotente ale inelului. Să se arate că:

1. dacă x şi y sunt nilpotente, atunci $x + y$ şi $x \cdot y$ sunt nilpotente.
2. n divide d.

(Un element $x \in A$ se numeşte divizor al lui zero dacă există $a \in A, a \neq 0$ astfel încât $x \cdot a = 0$. Un element $y \in A$ se numeşte nilpotent dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y^k = 0$).

Soluţie şi barem:

1. Din $x^k = y^l = 0$ rezultă $(x + y)^{k+l} = 0$ şi $(x \cdot y)^{k+l} = 0$, deci $x + y$ şi $x \cdot y$ sunt nilpotente. .... **2 puncte**

2. Notăm cu $U(A)$ mulţimea elementelor inversabile ale lui A şi cu $N(A)$ mulţimea elementelor nilpotente ale lui A. Observăm că dacă $x \in N(A)$, atunci $1 + x \in U(A)$: există k astfel încât $x^{2k+1} = 0$, deci

   $$(1 + x) \cdot (1 - x + ... + x^{2k}) = 1 + x^{2k+1} = 1. \qquad \textbf{1 punct}$$

   Mai mult, dacă $x, y \in N(A)$, atunci

   $$(1 + x) \cdot (1 + y) = 1 + x + y + x \cdot y = 1 + z,$$

   unde $z = x + y + x \cdot y \in N(A)$. Prin urmare $(\{1 + x | x \in N(A)\}, \cdot)$ este subgrup cu n elemente al grupului $(U(A), \cdot)$. .... **1 punct**

   Într-un inel comutativ finit, orice element neinversabil este divizor al lui zero. .... **1 punct**

   Rezultă că $U(A)$ are $q - d$ elemente, unde q este numărul elementelor lui A. Din teorema lui Lagrange obţinem că n divide $q - d$. **1 punct**

   Pe de altă parte, $(N(A), +)$ este subgrup al grupului $(A, +)$. Folosind din nou teorema lui Lagrange deducem că n divide q. Prin urmare n divide d. .... **1 punct**

Problema 3. Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea că în inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ *exact* un element *nu* se poate scrie ca sumă de două pătrate.

Soluţie şi barem: Cum $0, 1, 2$ sunt toate sume de două pătrate, rezultă că $n \geq 4$. Fie $k \in \{3, ..., n-1\}$ astfel încât $\widehat{k}$ nu se poate scrie ca sumă de două pătrate în $\mathbb{Z}_n$, şi să notăm cu $S = \mathbb{Z}_n \setminus \{\widehat{k}\}$. Cum orice element din S se scrie ca sumă de două pătrate, rezultă că S este închisă la înmulţirea din $\mathbb{Z}_n$. .... **1 punct**

Dacă k ar fi par, atunci $k = 2l$. Fiindcă $\widehat{l} \neq \widehat{k}$, rezultă că $\widehat{l} \in S$. Cum $\widehat{2} \in S$, ar rezulta că $\widehat{k} = \widehat{2} \cdot \widehat{l} \in S$, absurd. Deci k este impar. .... **1 punct**

- Dacă $\widehat{k} \notin U(\mathbb{Z}_n)$, atunci $-\widehat{1} \in S$. Fiindcă $\widehat{k} = (-\widehat{1}) \cdot (-\widehat{k}) \notin S$, rezultă că $-\widehat{k} \notin S$. Deci $\widehat{k} = -\widehat{k}$, de unde rezultă că $n = 2k$. Fiindcă k este impar, avem că $\widehat{k}(\widehat{k} - \widehat{1}) = 0$. De aici rezultă că $\widehat{k} = \widehat{k}^2 = \widehat{k}^2 + \widehat{0}^2 \in S$, contradicţie. .... **2 puncte**

- Dacă $\widehat{k} \in U(\mathbb{Z}_n)$, cum $U(\mathbb{Z}_n) \setminus \{\widehat{k}\}$ este închisă la înmulţire, rezultă că $U(\mathbb{Z}_n) \setminus \{\widehat{k}\}$ este subgrup al lui $U(\mathbb{Z}_n)$. Din teorema lui Lagrange, $\phi(n) - 1 | \phi(n) \Rightarrow \phi(n) = 2$. De aici rezultă că $n \in \{4, 6\}$. Cum în $\mathbb{Z}_6$ orice element se poate scrie ca sumă de două pătrate, rezultă că n poate fi numai 4. .... **2 puncte**

  Se vede uşor că $\widehat{3}$ este singurul element din $\mathbb{Z}_4$ care nu se poate scrie ca sumă de două pătrate, deci $n = 4$ este singurul număr cu proprietatea din enunţ. .... **1 punct**

Problema 4. Să se determine toate funcţiile $f : [0,1] \to [0,1]$ continue şi bijective cu proprietatea că

$$\int_0^1 g(f(x))dx = \int_0^1 g(x)dx,$$

pentru orice funcţie continuă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem: Funcţia f este strict monotonă. Presupunem mai întâi că f este strict crescătoare. Atunci pentru orice $c \in [0,1]$ să considerăm funcţia

$$g_c(x) = \begin{cases} x - c, & x \in [0, c) \\ 0, & x \in [c, 1]. \end{cases}$$

Relaţia $\int_0^1 g_c(f(x))dx = \int_0^1 g_c(x)dx$ este echivalentă cu

$$\int_0^{f^{-1}(c)} (f(x) - c)dx = \int_0^c (x - c)dx,$$

adică

$$\int_0^{f^{-1}(c)} f(x)dx = cf^{-1}(c) - \frac{c^2}{2}.$$ **3 puncte**

Notând $f^{-1}(c) = t$, obţinem

$$\int_0^t f(x)dx = tf(t) - \frac{f^2(t)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t (f(x) - x)dx = -\frac{(f(t) - t)^2}{2}.$$ **1 punct**

Notând cu $h(x) = f(x) - x$ pentru $x \in [0,1]$, relaţia de mai sus devine

$$\int_0^t h(x)dx = -\frac{h(t)^2}{2}, \forall t \in [0,1]. \qquad (1)$$

Observăm că h este continuă şi că $h(0) = h(1) = 0$. Fie t_0 un punct de minim global al lui h. Dacă $h(t_0) < 0$, atunci $t_0 < 1$. Mai mult, există $\delta > 0$ astfel încât $h(x) < 0$ pentru orice $x \in [t_0, t_0 + \delta]$. Aşadar,

$$\int_0^{t_0+\delta} h(x)dx < \int_0^{t_0} h(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{h(t_0 + \delta)^2}{2} < -\frac{h(t_0)^2}{2} \Rightarrow h(t_0 + \delta) < h(t_0).$$

Aceasta contrazice alegerea lui t_0 ca punct de minim global. Aşadar, $h(t_0) \geq 0$, deci $h(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$. Din (**??**) rezultă că $h(x) = 0$, deci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0,1]$. .... **2 puncte**

Dacă f este strict descrescătoare, observăm că funcţia $1 - f(x)$ este strict crescătoare şi satisface condiţia din enunţ. Din cele de mai sus rezultă că $1 - f(x) = x \Rightarrow f(x) = 1 - x$ pentru orice $x \in [0,1]$. .... **1 punct**